المملكة المغربية

ROYAUME DU MAROC



Ministère de l'Éducation National, de l'Enseignement Supérieur,
de la Recherche Scientifique et de la Formation des Cadres

Présidence du Concours National Commun
École Hassania des Travaux Publics



CONCOURS NATIONAL COMMUN

d'admission aux Établissements de Formation d'Ingénieurs et Établissements Assimilés

Session 2013

ÉPREUVE DE PHYSIQUE II

Filière **MP**

Durée **4** heures

Cette épreuve comporte 7 pages au format A4, en plus de cette page de garde

L'usage de la calculatrice est ***autorisé***

- *On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les* références *des questions abordées.*
- *Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*
- *Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.*
- *Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Ainsi, les diverses parties du problème sont relativement indépendantes entre elles.*

Four à induction

Données :

- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\, S.I.$;
- Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3.10^8\, m.s^{-1}$;
- Loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

Le chauffage par induction électromagnétique est couramment utilisé en industrie : fusion d'un métal, vitrification des déchets nucléaires par induction directe en creuset froid... Dans cette technique, un inducteur crée un champ magnétique variable qui induit des courants de Foucault directement dans le matériau conducteur. L'effet Joule de ces courants chauffe et fait fondre le conducteur.

Dans ce problème, on s'intéresse à la production d'un champ magnétique variable par un inducteur, au four à induction utilisé pour faire fondre un métal et à l'alimentation de l'inducteur.

Les différentes parties sont largement indépendantes.

Pour tout le problème, on se placera en coordonnées cylindriques (r, θ, z) auxquelles on associe la base locale $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$.

I. Champ magnétique créé par une spire en un point de son axe

On considère une spire circulaire (S) de centre O, de rayon a, contenu dans le plan Oxy, orthogonal à l'axe Oz. Cette spire est parcourue par un courant électrique d'intensité I constante. Elle est située dans l'air assimilable magnétiquement à du vide. Elle est orientée dans le sens trigonométrique comme le montre la figure 1a. On considère un point M, de cote z, situé sur l'axe Oz.

1. Par des arguments de symétrie très précis, déterminer la direction du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par la spire au point M.

2. En désignant θ l'angle sous lequel on voit la spire à partir du point M de son axe, montrer que le module de $\vec{B}(M)$ s'exprime comme $B(M) = \frac{\mu_0 I}{2a} sin^3(\theta)$.

3. Écrire l'expression de $B(M)$ en fonction de $B(O)$ et $u = \dfrac{z}{a}$.

4. Tracer le graphe représentant les variations du champ $B(M)$ en fonction de u.

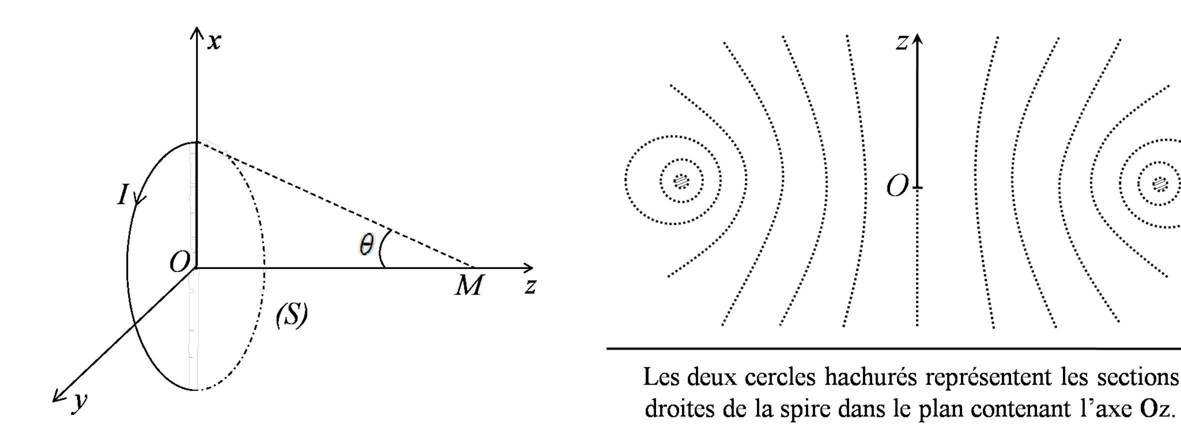


Figure 1a Figure 1b

5. Le relevé des lignes de champ magnétique dans un plan qui contient l'axe Oz est représenté sur la figure 1b. Justifier l'allure des courbes observées. Reproduire la figure 1b sur votre copie en y indiquant le sens du courant I et l'orientation du champ magnétique sur chaque ligne de champ.

6. Qu'obtiendrait-on comme allure de lignes de champ à grande distance de la spire ?

II. Champ magnétique d'une bobine cylindrique de longueur finie

On considère maintenant une bobine cylindrique consistant en un enroulement de N spires régulièrement espacées de rayon a d'épaisseur négligeable parcourues par un courant électrique d'intensité I constante et réparties sur une longueur H comme l'indique la figure 2.

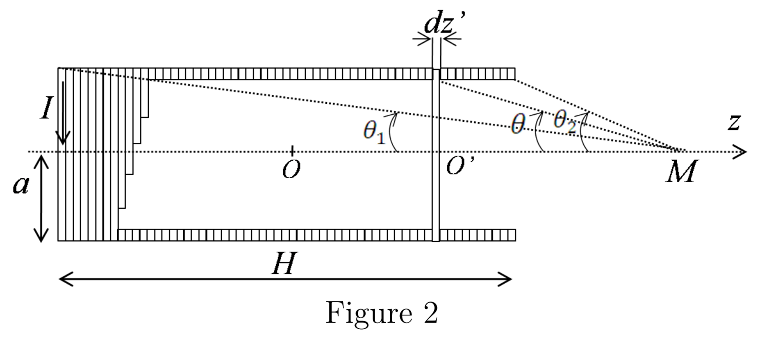


Figure 2

La bobine est située dans l'air assimilable magnétiquement à du vide. Un point M de l'axe Oz de la bobine est repéré grâce à la coordonnée z prise par rapport à l'origine O, point milieu de la bobine.

7. On considère une spire élémentaire d'épaisseur dz', centré en O' de coordonnée z'. En utilisant les résultats de la partie **I**, exprimer le champ magnétique élémentaire $dB(M)$ engendré par cette spire élémentaire au point M de l'axe de la bobine.

8. Déterminer le champ magnétique total $B(M)$ engendré en M, correspondant à l'ensemble des contributions de la bobine cylindrique. On exprimera le module $B(M)$ en fonction des angles θ_1 et θ_2 sous lesquels les deux extrémités de la bobine sont vues du point M.

9. Que devient l'expression de $B(M)$ lorsque la bobine est supposée de longueur infinie $(H >> a)$?

10. Quel doit être le rapport $\frac{a}{H}$ pour que le champ magnétique au centre de la bobine soit celui d'une bobine infinie avec une précision de 10^{-3} au moins ?

11. Représenter schématiquement les lignes de champ magnétique de la bobine finie. Quel procédé expérimental permet de visualiser le spectre magnétique de la bobine parcourue par le courant I ?

III. Champ magnétique d'une bobine cylindrique de longueur infinie

Les dimensions de la bobine cylindrique décrite dans la deuxième partie sont telles que l'on pourra utiliser l'approximation de la bobine infinie ($H >> a$).

On se propose de calculer le champ magnétique en tout point M de l'espace repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z).

12. Sous l'hypothèse de la bobine cylindrique infinie, déterminer, par des arguments de symétrie et d'invariance, la direction du champ magnétique $\vec{B}(M)$ et les variables dont dépend son module $B(M)$ en un point M de l'espace.

13. En mettant en œuvre le théorème d'Ampère sur un contour judicieusement choisi, montrer que le champ magnétique $\vec{B}_{int}(M)$ à l'intérieur de la bobine infinie est uniforme et donner son expression.

14. Déterminer de même le champ magnétique $\vec{B}_{ext}(M)$ à l'extérieur de la bobine infinie.

15. Représenter schématiquement les lignes de champ magnétique de la bobine infinie.

16. Donner la définition du coefficient d'inductance propre L de la bobine. Établir son expression en fonction de N, H, a et μ_0. Commenter.

17. On assimile la bobine étudiée à une nappe de courant surfacique orthoradial d'intensité uniforme $\vec{j_s}$. Exprimer le vecteur densité surfacique $\vec{j_s}$ en fonction de I, N, et H dans la base des coordonnées cylindriques $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$

IV. Champ magnétique d'une bobine infinie parcourue par un courant variable

La bobine infinie décrite dans la partie **III** est parcourue maintenant par un courant électrique d'intensité $i(t)$ variable dépendant du temps t. On note $\vec{B}_a(t)$ le champ magnétique créé par le courant $i(t)$ et on le suppose uniforme.

18. Énoncer la loi de Faraday (concernant une f.é.m induite dans un circuit matériel) et citer deux causes différentes de la variation du flux magnétique.

19. Justifier le fait que le courant électrique $i(t)$ est source d'un champ électrique $\vec{E}_i$ que l'on cherche à déterminer. Montrer, par des arguments à expliciter clairement, que le champ $\vec{E}_i$ est orthoradial et que son module ne dépend que de la distance r du point considéré à l'axe Oz.

20. En mettant en œuvre la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday sur un contour judicieusement choisi, établir l'expression du champ électrique induit $\vec{E}_i$ en tout point de l'espace. Commenter le sens de $\vec{E}_i$ ainsi que l'influence de r et de la fréquence de $\vec{B}_a(t)$.

V. Application : four à induction

Les fours à induction à creuset se composent essentiellement d'une bobine inductrice entourant un creuset dans lequel se trouve la masse métallique à fondre (figure 3).

La bobine cylindrique est formé de N spires circulaires régulièrement espacées, de rayon a, réparties sur une couche de hauteur H. Elle est parcourue par un courant électrique sinusoïdal d'intensité $i(t) = I_0 \, cos(\omega t)$, de fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi} = 1\,kHz$. La longueur H de la bobine est suffisamment grande devant son rayon a pour être considérée comme infinie.

Le creuset est assimilé à un cylindre transparent au champ électromagnétique. On dispose dans le creuset un barreau cylindrique métallique non magnétique d'axe Oz.

Afin de simplifier, on suppose que la bobine est complètement remplie par le cylindre conducteur (même rayon a et même hauteur $H >> a$). Ce conducteur a les mêmes constantes μ_0 et ε_0 que le vide et est supposé ohmique. Sa conductivité γ, supposée constante et uniforme, a la même valeur en régime alternatif qu'en régime permanent.

L'axe du barreau métallique est confondu avec celui de la bobine.

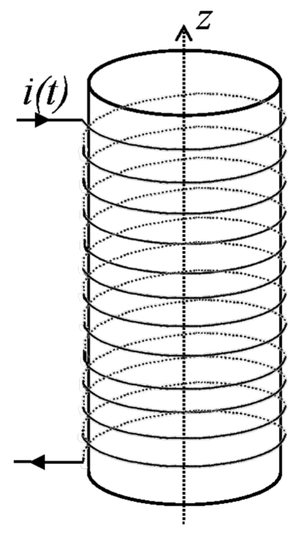


Figure 3

21. Montrer que pour la fréquence $f = 1\,kHz$, l'équation de Maxwell-Ampère peut être simplifiée. Donner le nom de l'approximation ainsi faite. On donne la conductivité électrique du cuivre $\gamma = 6.10^7\ S.I.$

22. On se place dans le cadre de cette approximation et on néglige dans un premier temps, le champ magnétique créé par les courants induits dans le cylindre conducteur.

22.1. Montrer que le champ magnétique uniforme $\vec{B_a}$ est donné par $\vec{B_a}(t) = B_0 cos(\omega t)\vec{u_z}$. Donner l'expression de B_0.

22.2. Montrer que le champ électrique $\vec{E_i}$ induit à l'intérieur du solénoïde s'écrit sous la forme $\vec{E_i} = \frac{1}{2}\omega B_0 sin(\omega t) r \vec{u_\theta}$.

22.3. On constate que le barreau conducteur est parcouru par un courant volumique (dit *courant de Foucault*) de densité volumique $\vec{j}$. Expliquer clairement l'origine de ce courant. Quelle est la conséquence de l'existence de ce courant pour le barreau conducteur ?

22.4. Donner l'expression de la densité volumique $\vec{j}$ des courants induits en tout point du conducteur. Quelle est son unité ?

22.5. Écrire l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule en tout point du matériau conducteur par les courants induits. Établir l'expression de sa valeur moyenne temporelle $< p_J >$. Commenter l'inhomogénéité de la puissance $< p_J >$.

22.6. En déduire la puissance moyenne totale $< P_J >$ dissipée par effet Joule dans le conducteur. Commenter l'influence de la conductivité du conducteur, de son caractère massif et de la fréquence du courant $i(t)$. Montrer que le modèle explique

pourquoi dans le chauffage par induction, on choisit une fréquence de $1\,kHz$ plutôt que le $50\,Hz$ directement accessible.

22.7. Expliquer l'intérêt pratique du dispositif étudié.

22.8. Montrer qu'on diminue la puissance moyenne totale $< P_J >$ en divisant le conducteur en feuilles cylindriques ou en fibres de rayon $b = \frac{a}{n}$ séparées par un isolant. Montrer que dans le deuxième cas, les pertes moyennes par unité de volume sont divisées par n^2 ?

23. Les courants calculés dans la question **22.4** créent à leur tour un champ magnétique $\vec{B_i}$. On désire vérifier l'hypothèse $|\vec{B_i}| << |\vec{B_a}|$. On se place toujours dans le cadre de l'approximation de la question **21**.

23.1. Justifier que $\vec{B_i} = B_i(r,t)\vec{u_z}$.

23.2. En utilisant la forme locale de l'équation de Maxwell-Ampère, calculer le champ magnétique $\vec{B_i}$. Montrer que l'hypothèse $\vec{B_i}| << |\vec{B_a}|$ est vérifiée si $a << a_l$. Donner l'expression de a_l et calculer sa valeur numérique dans le cas du cuivre. Commenter le résultat obtenu.

23.3. Dans un four à induction habituel, le rayon a du cylindre est de l'ordre de $10\,cm$. L'hypothèse $|\vec{B_i}| << |\vec{B_a}|$ est-elle vérifiée ?

23.4. On suppose que l'hypothèse $|\vec{B_i}| << |\vec{B_a}|$ n'est pas valable et on étudie le champ magnétique total dans le barreau conducteur. On note $\vec{B} = B(r,t)\vec{u_z}$ le champ magnétique total. Montrer que le champ magnétique $B = B(r,t)$ vérifie l'équation différentielle $\frac{1}{r}\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} = \mu_0\gamma\frac{\partial B}{\partial t}$. À quel type de solution faut-il s'attendre dans le cas d'une dépendance temporelle harmonique ?

23.5. Que se passe-t-il si l'on travaille à fréquence élevée ?

VI. Détermination expérimentale de l'inductance et de la résistance de la bobine d'un four à induction

L'inducteur, associé au four à induction étudié dans la partie **V**, se comporte par rapport à son alimentation et dans les conditions optimales de fonctionnement, comme une charge inductive constituée d'une inductance pure L en série avec une résistance R_L.

L'objectif de cette partie est de déterminer les valeurs des grandeurs caractéristiques de la bobine (résistance R_L et inductance L) du four étudié par une méthode expérimentale. Pour cela, on réalise un circuit RLC en associant en série :

– un générateur basse fréquence (GBF), supposé idéal, délivrant une tension sinusoïdale de valeur efficace U maintenue constante et de fréquence f réglable ;

– un conducteur ohmique, dit de mesure, de résistance R_m ;

– la bobine de résistance R_L et d'inductance L ;

– un condensateur de capacité C.

Un oscilloscope permet d'observer en voie CH1 la tension aux bornes du générateur et en voie CH2 la tension aux bornes du conducteur de résistance R_m de valeur efficace U'.

24. Représenter le schéma du circuit et indiquer les branchements de l'oscilloscope.

25. Indiquer, en le justifiant, sur quel mode de fonctionnement (AC ou DC), l'oscilloscope doit être utilisé pour mesurer les grandeurs efficaces.

26. Proposer une méthode permettant rapidement de déterminer la fréquence de résonance à l'aide de l'oscilloscope.

27. Établir l'expression de l'intensité efficace I du courant dans le circuit. En déduire l'expression de la fréquence f_0 et celle du courant efficace I_0 à la résonance du courant.

28. On détermine expérimentalement la fréquence f_0 et le rapport $\frac{U'}{U}$ à la résonance. En déduire l'expression donnant l'inductance L et celle donnant la résistance R_L de la bobine.

29. Le GBF n'est pas idéal et possède une résistance interne R_g. L'amplitude de la tension qu'il délivre ne reste pas constante lorsque la fréquence f varie. Expliquer pourquoi et proposer un montage qui permet de remédier à cette situation.

VII. Étude de l'alimentation du four à induction

Dans cette partie, on assimile l'inducteur associé à un four à induction à une charge inductive constituée d'une inductance pure $L = 70\,\mu H$ en série avec une résistance $R_L = 20\,m\Omega$. Cette charge inductive est mise en série avec un condensateur de capacité $C = 0,5\,mF$ (figure 4a). La charge totale constituée de l'inductance, de la résistance et du condensateur est alors alimentée par une tension $u(t)$ alternative "créneau" (figure 4b), d'amplitude $U_m = 200\,V$ et de fréquence fixée à $f = 1\,kHz$, fournie par un onduleur autonome non représenté sur la figure. La tension $u(t)$ a pour développement en série de Fourier :

$$u(t) = \frac{4.U_m}{\pi}\left[sin(2\pi ft) + \frac{1}{3}.sin(6\pi ft) + \frac{1}{5}.sin(10\pi ft) + ...\right]$$

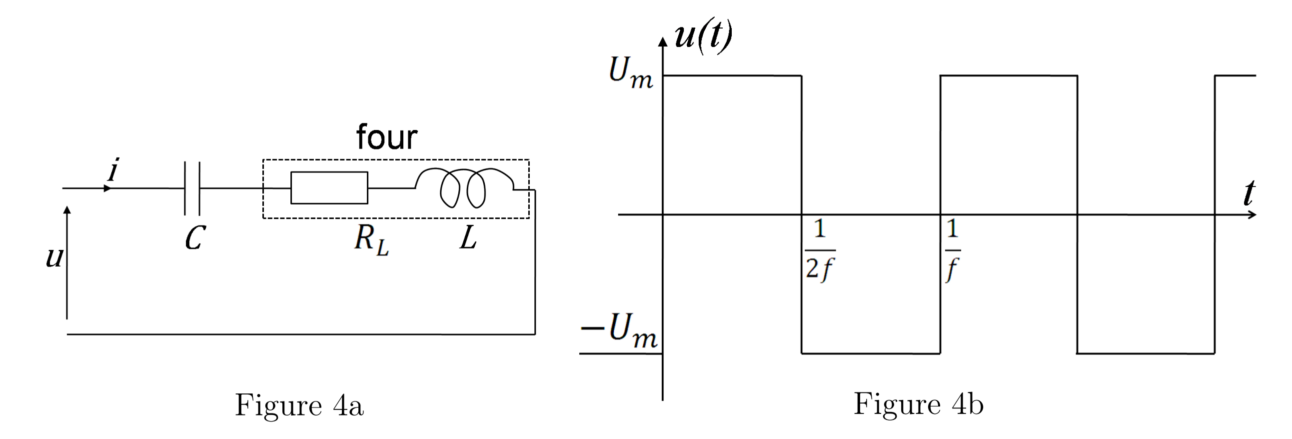


Figure 4a

Figure 4b

30. Quel est le rôle du condensateur ajouté en série avec l'inducteur ?

31. Justifier qualitativement le développement en série de Fourier de la tension $u(t)$. Représenter le spectre de $u(t)$.

32. Calculer les valeurs efficaces U_1 et U_3 des tensions sinusoïdales $u_1(t)$ et $u_3(t)$ relatives aux harmoniques 1 et 3.

33. Calculer les impédances Z_1 et Z_3 de la charge totale relatives aux harmoniques 1 et 3.

34. Calculer le rapport $I_{1/3} = \frac{I_1}{I_3}$, où I_1 et I_3 sont les valeurs efficaces des intensités des courants correspondants aux harmoniques 1 et 3. Montrer que l'on peut considérer que le courant $i(t)$ dans le circuit est pratiquement sinusoïdal et s'écrit sous la forme : $i(t) = I_0 sin(\omega t + \varphi)$. Exprimer I_0 et φ.

35. Calculer la puissance active P consommée par le four.

FIN DE L'ÉPREUVE